この素励起のもう一つの興味深い性質は，それが〝分数統計〞に従うとみられることである。[6] 2個の素励起の波動関数を $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ と書くと，その置換に対する対称性は，ボース統計でもフェルミ統計でもなくて，

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = e^{2\pi i/m}\Psi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \tag{12}$$

になる。ただし，このような統計が系のどのような物理的性質に反映するかは明かでない。

§ 4. おわりに

以上，分数量子ホール効果とそれに対する Laughlin の理論を紹介した。Laughlin状態は新しい型の量子的な流体状態としてたいへん興味深い。これによって，分数量子ホール効果の現象は基本的に説明されたと思う。しかし，この状態がどのような秩序状態であるのか，そこになんらかの秩序パラメータが存在するのか，存在するとすればそれは何か，温度を上げていったとき状態はどのように変化するか，などの問題はまだ解明されていない（少くとも私にはわからない）。この問題がトポロジーやアノマリーとどう関係するかは知らないが，非常に興味深い問題であることは確かだ。

1) K. von Klitzing, G. Dorda & M. Pepper: Phys. Rev. Letters **45** (1980), 449.
解説として
長岡洋介：「超抵温の物性物理」（阿部竜蔵，斯波弘行編，1986 培風館）p. 23.

2) D. C. Tsui, H. L. Störmer & A. C. Gossard: Phys. Rev. Letters **48** (1982), 1559.

3) 解説として，
長岡洋介：日本物理学会誌 **40** (1985), 489.

4) R. B. Laughlin: Phys. Rev. **B27** (1983), 3383.

5) R. B. Laughlin: Phys. Rev. Letters **50** (1983), 1395.

6) B. I. Halperin: Phys. Rev. Letters **52** (1984), 1583.
D. Arovas, J. R. Schrieffer & F. Wilczek: Phys. Rev. Letters **53** (1984), 722.

Induced Charge on a Torus

名大・理　中谷　一（発表者）
愛知大・教養　長谷部勝也（共同研究者）
名大・理　野々山龍彦（〃）

2＋1次元時空における外部磁場中での massive フェルミオン系の Induced Chargeを，Torus上

において（即ち周期的境界条件のもとで），time-dependent Dirac 方程式を数値的に解くことにより計算し，その理論的考察を行なった。

Induced Charge（以下，ＩＣと略す）とは，外場中でのフェルミオン系の粒子数演算子の真空期待値である。このＩＣの研究は，Jackiw と Rebbi[1]が，ソリトンを含む１＋１次元 massless フェルミオン系でのソリトンのフェルミオン数期待値を議論したことに始まる。しかし，彼らの議論は，荷電共役対称性を仮定していることが本質的であり，そのままの形で massive フェルミオン系には適用できない。その後，多くの人々[2),3)]によって massive フェルミオン系でのＩＣの計算が試みられ，±1/2（１＋１次元），±1/2×全磁束（２＋１次元）という結果が得られている。しかし，それらの計算は，(1)計算過程に何らかの形で，発散量が含まれ，計算結果が有限化の方法に依存すること，(2)フェルミオン数演算子Ｑを（例えば２＋１次元で）

$$Q=\frac{1}{2}\int[\phi^{\dagger},\ \phi]\ d^2x,$$

のように定義し，各モード毎のフェルミオン数演算子 Q_n を真空状態 $|0>$ に作用してもゼロにならないこと（即ち $Q_n|0>\neq 0$）等の点において，その物理的意味が不明確である。我々は，不定性のないＩＣの定義及び計算方法を提案し，それに基づき，２＋１次元 massive フェルミオン系において，具体的にＩＣの計算を行なった。

ＩＣは，次のように定義される。まず，フェルミオン数演算子Ｑを各モードに対して，$Q_n|0>=0$ となるように normal ordering を用いて，以下のように定義する。

$$Q=\int:\phi^{\dagger}\,\phi:\ d^2x.$$

ＩＣは演算子の時間的変化を含めて，時刻 $t=T_i$ から $t=T_f$ において，

$$IC=<0(T_i)|Q(T_f)|0(T_i)>-<0(T_i)|Q(T_i)|0(T_i)>, \tag{1}$$

と定義する。ここで，$|0(t)>$ は時刻 t での真空である。(1)式は，系の時間発展を表わす演算子Ｖ（即ち，$\phi(T_f)=V\phi(T_i)$）を用いて

$$IC=\sum_{n,j}|(+n|V|-j>|^2-\sum_{n,j}|(-n|V|+j>|^2, \tag{2}$$

と書かれる。ここで，$|\pm j>$，$|\pm n)$ はそれぞれ $t=T_i$，T_f での正・負エネルギーの固有状態である。この定義は，系の時間発展を考慮している点が本質的で，(2)の表式は各項が正・負エネルギー間の遷移確率であることより，n，j が大きくなるにしたがって，各項が小さくなると予想され，(2)式のそれぞれの和は収束するものと期待される。（Ref. 4の議論より，磁場をかける領域及びその時間的変化率を有限とする限り，(2)式のそれぞれの和は収束することが証明される。）

数値計算は２次元平面に垂直な一様な磁場をかけた massive フェルミオン系（質量 μ）について行なった。数値計算の制約上，平面の大きさを有限とし，フェルミオン場に対して周期的境界条件を課した。この系の特徴は，平面上の全磁束がゼロであり，通常のランダウ準位に加えて，境界付近に鋭いピークを

持った準位[5](Escape 準位と呼ぶ)が存在することである。この準位は，我々の観測が局所的である限り，観測にかからないと考えられるので，我々の観測するＩＣは，

(観測されるＩＣ)＝(全空間でのＩＣ)－(Escape 準位が持ち去るＩＣ)，

で求められる。

具体的計算は，(2)式の各項即ち遷移確率を time-dependent な Dirac 方程式の数値的な解より求めるという方法によって行なった。簡単のためにベクトルポテンシャル $\vec{A}=(0, Bx)$， $B=\varepsilon t$ (ε は定数)とする。ここでは ε， μ 依存性に注目して， y方向運動量 p_y については， $p_y=0$ なる一つのモードについてのみ計算を行なった。[6]磁場の時間的変化率 ε，フェルミオン質量 μ のいろいろな値に対する主な計算結果は，以下の通りである。

磁場ゼロから磁場ありの状態へ系が変化した時，(即ち， $T_i=0$，$T_f\neq 0$)

・全空間でのＩＣは， B，ε，μ の値に依らず，ゼロとみなされる。

・観測されるＩＣは，磁場Ｂの変化に依らず，ほぼ一定である一方， ε と共に増加し， μ と共に減少する。特殊な場合として， $\varepsilon\to 0$ (adiabatic process)でＩＣ→0， $\mu=0$ でＩＣ＝1/2である。

磁場ありから磁場ありの状態へ系が変化した時，(即ち， $T_i\neq 0$， $T_f\neq 0$)

・全空間でのＩＣ，観測されるＩＣともに，パラメーターの値に依らず，ゼロとみなされる。

以上の結果について，全空間でのＩＣが如何なる場合でもゼロであることは，磁場(或いは時間)の変化に対するＩＣの保存則として，又，観測されるＩＣの ε， μ 依存性は，正・負エネルギー間の遷移確率の ε， μ 依存性の反映として，自然に解釈される。

なお，詳しい議論は， Ref. 6， 7をご覧下さい。

References

1) R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. **D13** (1976), 3398.

2) J. Goldstone and F. Wilczeck, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 986.
A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 2077.
A. Z. Capri, R. Ferrari and L. E. Picasso, Phys. Rev. **D30** (1984), 2136.
R. MacKenzie and F. Wilczek, Phys. Rev. **D30** (1984), 2194.
R. Blankenbecler and D. Boyanovsky, Phys. Rev. **D31** (1985), 2089.

3) A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Phys. Rev. **D30** (1984), 809.
K. Ishikawa, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 1615; Phys. Rev. **D31** (1985), 1432.

4) N. Christ, Phys. Rev. **D21** (1980), 1591.

5) R. Rajaraman and J. Bell, Phys. Rev. Lett. **116B** (1982), 151. そこでは同様の準位(但し(1＋1)次元)が導入されているが，時間発展は考慮されていない。

6) p_y 依存性については， K. Hasebe, H. Nakatani, T. Nonoyama, preprint (準備中) をご覧下さい。

7) K. Hasebe, H. Nakatani, T. Nonoyama, preprint, DPNU-86-27 Nagoya Univ.
H. Nakatani, preprint DPNU-86-45, Nagoya Univ. (to be published in Prog. Theor. Phys. Vol. 77, No. 4).

電荷密度波（ＣＤＷ）とアノマリー

京大・基研　高　山　　一

$NbSe_3$ などの擬１次元導体において，波数 $Q=2k_F$（k_Fはフェルミ波数）をもつCDW が低温で生じる。電子・格子間相互作用による多体効果であり，同じ波数をもつ周期的な格子変調を伴う。このCDW の集団的な運動と１＋１次元 Dirac 場のカイラル異常とが密接に関係しているとする考え方が Su-Sakita（ＳＳ）によって提案された。[1] この理論を紹介し，２，３のコメントを加えたい。[2]

簡単のため１電子スペクトルとして $\varepsilon_k=\hbar^2k^2/2m$ をとる。ＣDWの起因は運動量が±$\hbar Q$ だけ異なる電子間で波数∓Qのフォノンをやり取りすることにあるので，電子状態を右向きと左向きの進行波 $\phi_R(x)$，$\phi_L(x)$の２成分に分け（図１参照），スピノル表示 $\Psi^T=[\phi_R, \phi_L]$ を導入する。ＣDWの周期が格子の周期と不整合である場合，系を記述するラグランジアン密度として

$$\mathscr{L}=-\rho_0\,\phi^*\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_Q^2-v_Q^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi + \Psi^\dagger\Big[\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi+\tau_3 v_F\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}A\right) + \frac{g\eta}{\sqrt{2}}\tau_1 e^{-i\tau_3\chi(x)}+\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{ie}{\hbar c}A\right)^2}\Big]\Psi \quad (1)$$

が近似的に得られる。但し $\phi\equiv\eta e^{i\chi}/i\sqrt{2}$ はフォノン場，τ_iはパウリ行列（各定数については原論文を参照されたい）。エネルギーはフェルミ準位から計ってあるので，その近傍の電子だけを考慮すればよい場合は(1)式の下線部は無視してよい。以下この場合を相対論的(R)模型と呼び，この項を含めた，物性論本来の問題を非相対論的（ＮＲ）模型と呼ぶことにする。

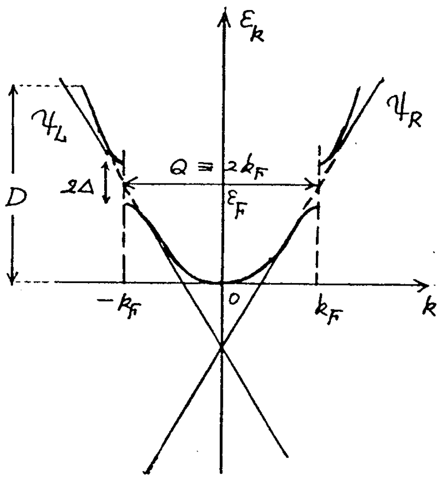

図１　１次元電子スペクトル。放物線（直線）がＮＲ(R) 模型。パイエルス状態ではフェルミ準位 ε_Fにギャップ 2Δ が開く。

ＳＳ理論はＲ模型に基づく。$\mathscr{L}$のもつ対称性から，対応する Noether カレントが定義される。通常のゲージ対称性から通常の電荷，電流密度 $\rho(x)$，$j(x)$ が定義され，それらは期待値としても連続の式を満す。カイラルゲージ変換 $\{\Psi(x)\to\Psi'(x)=e^{i\tau_3\Lambda(x)}\Psi(x),\ \phi(x)\to\phi'(x)=e^{-2i\Lambda(x)}\phi(x)\}$ に対する$\mathscr{L}$の不変性から，カイラル電荷，電流密度 $\rho^{(5)}(x)$，$j^{(5)}(x)$ が定義されるが，それらは期待値とし